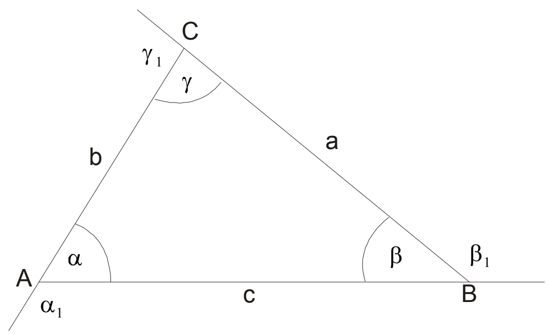
## 2. UČENIK UME DA KORISTI OSNOVNA SVOJSTVA TROUGLA, ČETVOROUGLA,PARALELOGRAMA I TRAPEZA , RAČUNA NJIHOVE OBIME I POVRŠINE

**Vreme je da se podsetimo svih potrebnih formulica.....**

### ***TROUGAO***

Mnogougao koji ima tri stranice zove se **trougao.** Osnovni elementi trougla su :

- Temena A,B,C
- Stranice a,b,c ( po dogovoru stranice se obeležavaju nasuprot temenu, npr naspram temena A je stranica a, itd)
- Uglovi , unutrašnji $\alpha, \beta, \gamma$ i spoljašnji $\alpha_1$, $\beta_1$ , $\gamma_1$




**Osnovne relacije za uglove i stranice trougla su**:

1) Zbir unutrašnjih uglova u trouglu je $180^0$ tj. $\alpha+\beta+\gamma=180^0$

2) Zbir spoljašnjih uglova je $360^0$ tj. $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360^0$

3) Spoljašnji i njemu susedni unutrašnji ugao su uporedni,tj.

$$\alpha+\alpha_1=\beta+\beta_1=\gamma+\gamma_1=180^0$$

4) Spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva nesusedna unutrašnja ugla, tj

$$\alpha_1=\beta+\gamma \qquad \beta_1=\alpha+\gamma \qquad \gamma_1=\alpha+\beta$$

5) Svaka stranica trougla manja je od zbira a veća od razlike druge dve stranice, tj

$$|a-b|<c<a+b$$
$$|a-c|<b<a+c$$
$$|b-c|<a<b+c$$

6) Naspram većeg ugla nalazi se veća stranica i obrnuto.

Ako je $\alpha=\beta$ onda je a = b
Ako je a = b onda je $\alpha=\beta$

**Četiri značajne tačke trougla su:**

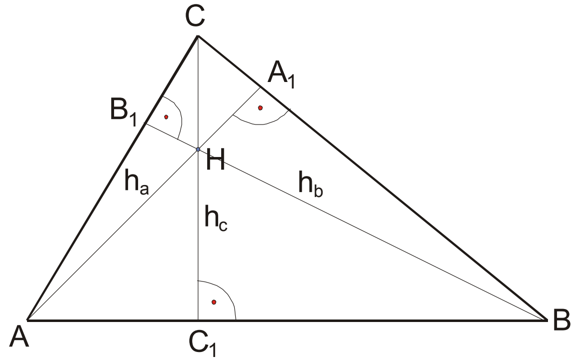
1) Ortocentar (H)

2) Težiste (T)

3) Centar upisane kružnice (S)

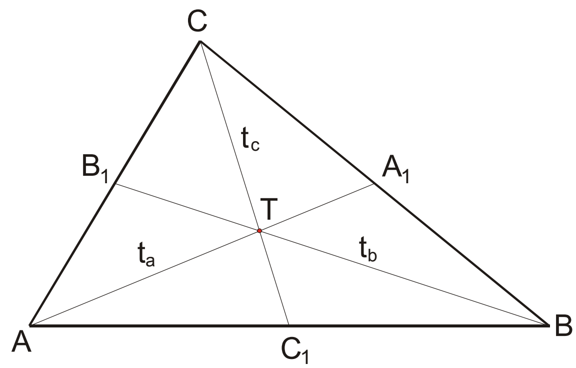
4) Centar opisane kružnice (O)

**Ortocentar** se nalazi u preseku visina trougla $h_a, h_b, h_c$. ( Visina je najkraće rastojanje od temena do naspramne stranice).
Kod oštrouglog trougla je u trouglu, kod pravouglog u temenu pravog ugla a kod tupouglog van trougla.




$\mathbf{h_a \cap h_b \cap h_c = H}$ **Ortocentar**

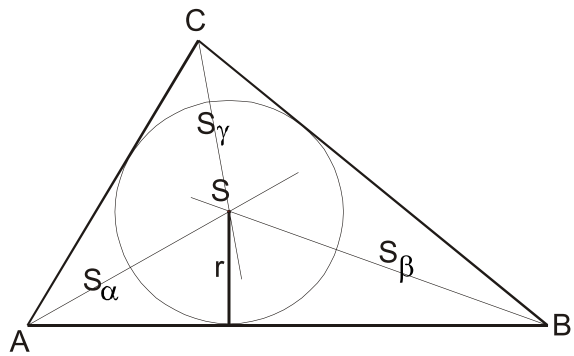
**Težišna duž** trougla je duž koja spaja teme sa sredinom naspramne stranice. Težišne duži seku se u jednoj tački , a to je **TEŽIŠTE TROUGLA.** Težište deli težišnu duž u razmeri 2:1.




$t_a \cap t_b \cap t_c = T$

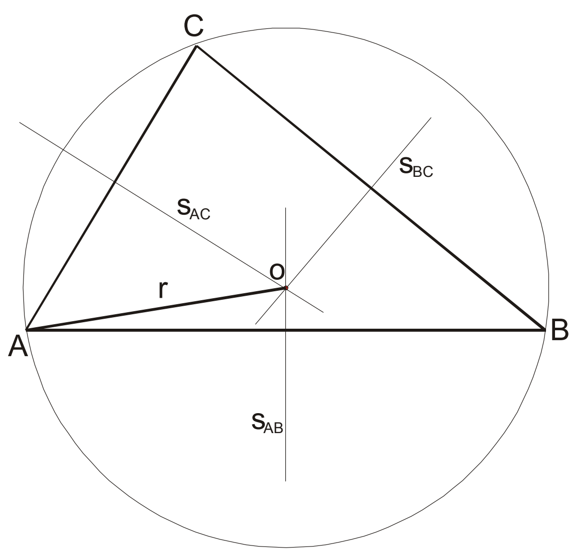
$$AT : TA_1 = 2:1$$
$$BT : TB_1 = 2:1$$
$$CT : TC_1 = 2:1$$

**Centar upisane kružnice** je tačka preseka simetrala uglova i kod svih trouglova je u oblasti trougla.




$$s_\alpha \cap s_\beta \cap s_\gamma = S$$

**Centar opisane kružnice** je tačka preseka simetrala stranica. Kod oštrouglog trougla je u trouglu, kod pravouglog na sredini hipotenuze i kod tupouglog van trougla.



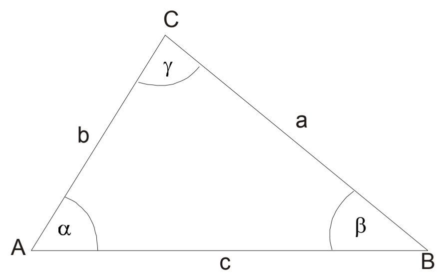

$$s_{AB} \cap s_{AC} \cap s_{BC} = O$$

**Vrste trouglova:**

Trouglovi se dele prema “stranicama” i prema “uglovima”.

| **Prema stranicama:** | **Prema uglovima:** |
| --- | --- |
| **1)** jednakostranični | **1)** oštrougli |
| **2)** jednakokraki | **2)** pravougli |
| **3)** nejednakostranični | **3)** tupougli |

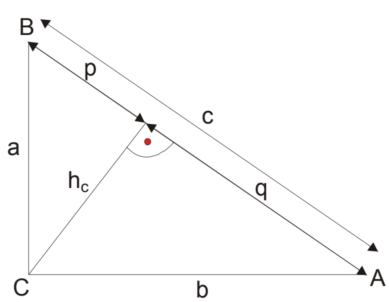
**Nejednakostranični**




O = a + b + c

$$P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$$

**Pravougli:**



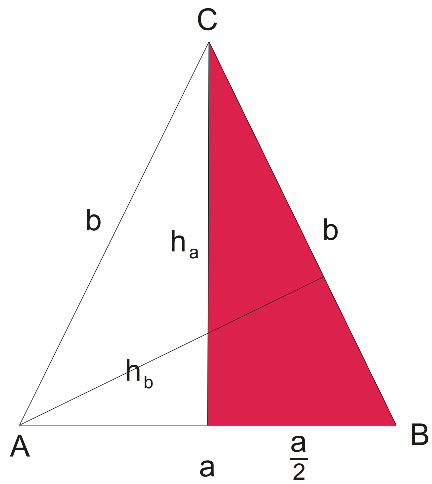

O = a + b + c

$P=\frac{ab}{2}$ ili $P=\frac{ch_c}{2}$ odavde je: $h_c=\frac{a\cdot b}{c}$

$a^2+b^2=c^2$ **Pitagorina teorema**

$R=\frac{c}{2}$ ; $r=\frac{a+b-c}{2}$ ; $h_c=\sqrt{pq}$ ; $a=\sqrt{pc}$ ; $b=\sqrt{qc}$ ; $c=p+q$

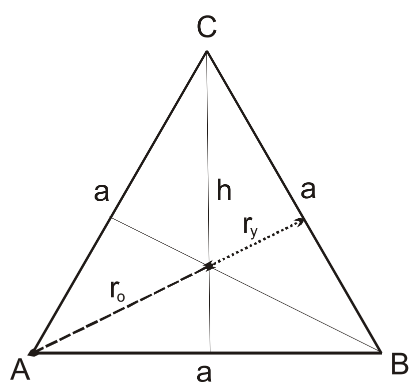
**Jednakokraki :**




Ovde je a osnova i b krak ( kraci)

O = a + 2b $\quad$ $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}$ $\quad$ Primena Pitagorine teoreme: $h_a^2+(\frac{a}{2})^2=b^2$

**Jednakostranični:**

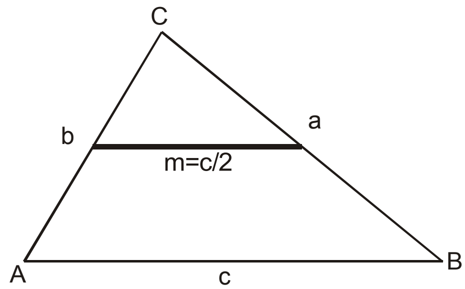


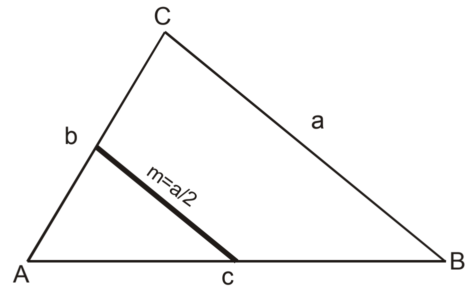

O = 3a i $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

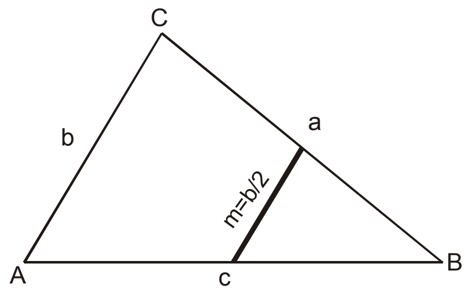
Visina $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ; $\quad r_y=\frac{1}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\quad r_o=\frac{2}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Kod ovog trougla sve četiri značajne tačke se nalaze u jednoj tački.**

***Srednja linija trougla*** **(m) je duž koja spaja sredine dve stranice i uvek je jednaka polovini paralelne stranice.**




**Podudarnost**

$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$

**(SSS)** Ako su sve stranice jednog trougla jednake odgovarajućim stranicama drugog trougla.

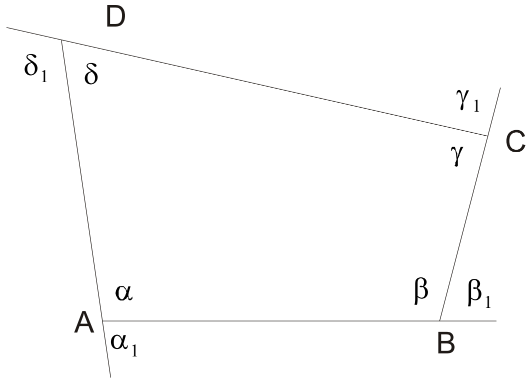
**(SUS)** Ako su dve stranice i zahvaćeni ugao jednog trougla jednaki dvema stranicama i zahvaćenom uglu drugog trougla.

**(USU)** Ako su stranica i na nju nalegli uglovi jednog trougla jednaki sa stranicom i na nju naleglim uglovima drugog trougla.

**(SSU)** Ako su dve stranice i ugao naspram veće od njih jednog trougla jednaki dvema stranicama i uglu naspram veće od njih drugog trougla.

## *ČETVOROUGAO*

**Mnogougao koji ima četiri stranice naziva se četvorougao**.

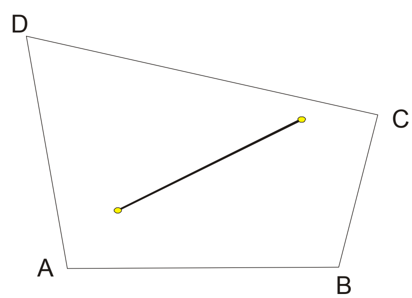



Za svaki četvorougao važi da im je zbir unutrašnjih i spoljašnjih uglova isti i iznosi $360^0$

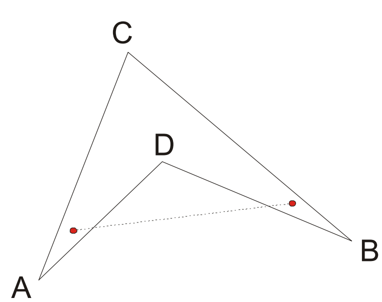
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0 \qquad \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=360^0$$

Najpre da kažemo da četvorouglovi mogu biti : **konveksni** i **nekonveksni**.

Četvorougao je **konveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti ostaje unutar četvorougla.




Četvorougao je **nekonveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti izlazi iz nje.




Podela četvorouglova može se izvršiti na više načina.Prvu podelu izvršio je još Euklid.

On ih je podelio u pet grupa: kvadrati, pravougaonici,rombovi,romboidi i trapezi.

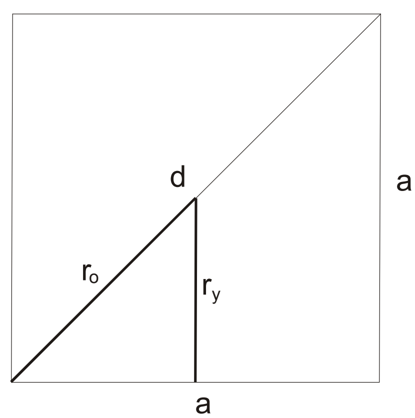
Međutim, danas je podela izvršena na sledeći način:

1) **Paralelogrami** (imaju po dva para paralelnih stranica)
2) **Trapezi** (imaju jedan par paralelnih stranica)
3) **Trapezoidi** (nemaju paralelne stranice)

**Paralelogram je četvorougao čije su naspramne stranice paralelne**.

**KVADRAT**

- Sva četiri ugla su mu prava
- Sve stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove pod pravim uglom
- Centralno simetrična je figura
- Ima 4 ose simetrije



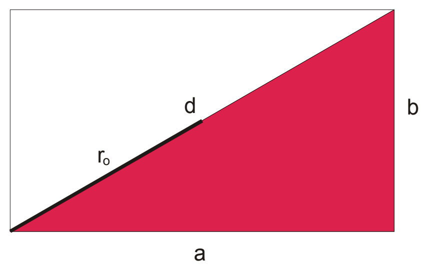

O= 4a

$P = a^2$ ili $P = \frac{d^2}{2}$, $r_y = \frac{a}{2}$ i $r_o = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

d=a$\sqrt{2}$ i ako nam treba dužina stranice a imamo dužinu dijagonale $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

## PRAVOUGAONIK

- Sva četiri ugla su mu prava
- Paralelne stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove
- Centralnosimetrična figura
- Ima 2 ose simetrije



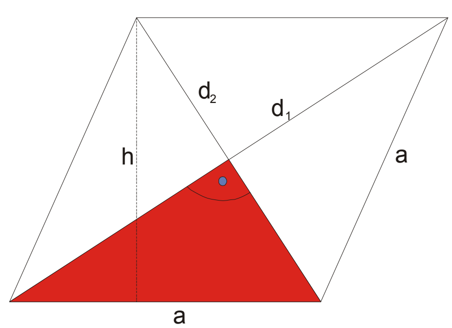

O = 2a + 2b

P = ab

$r_o = \frac{d}{2}$ a dijagonalu nalazimo iz Pitagorine teoreme: $d^2 = a^2 + b^2$

## ROMB

- Sve četiri stanice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove pod pravim uglom
- Centralnosimetrična figura
- Ima dve ose simetrije




O = 4a

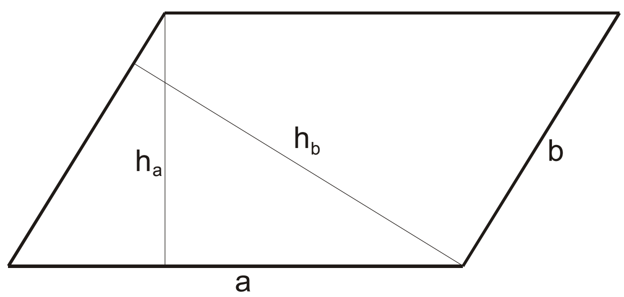
$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ ili P = ah

Može se upisati kružnica čiji je poluprečnik $r_y = \frac{h}{2}$

Pitagorina teorema se primenjuje na osenčeni trougao: $a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2$

## ROMBOID

- Paralelne stranice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove
- Centralnosimetrična figura



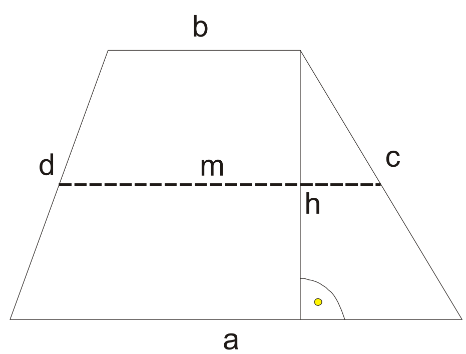

**O = 2a + 2b**

P= $ah_a$ ili P= $bh_b$

**Ne može da se upiše niti da se opiše kružnica .**

**Četvorougao čije su samo dve naspramne stranice paralelne zove se TRAPEZ.**

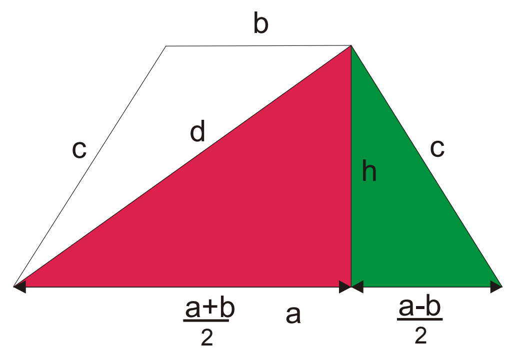
Paralelne stranice se zovu osnovice, a druge dve kraci.




Stranice a i b su osnovice, c i d kraci. Duž koja spaja središta krakova je srednja linija trapeza $m = \frac{a+b}{2}$ . Naravno m je paralelna i sa a i sa b.

O = a+b+c+d ; P= $\frac{a+b}{2} \cdot h$ ili P = mh

## JEDNAKOKRAKI TRAPEZ



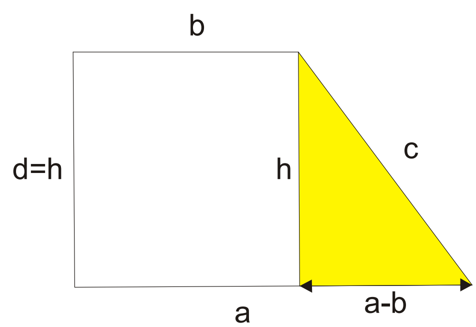

**O = a + b + 2c**

P= $\frac{a+b}{2}\cdot$h ili P = mh

**Primena Pitagorine teoreme:** $(\frac{a-b}{2})^2+h^2=c^2$ ( na zeleni trougao)

$(\frac{a+b}{2})^2+h^2=d^2$ ( na crveni trougao)

## PRAVOUGLI TRAPEZ




O = a + b + c + h

P= $\frac{a+b}{2}\cdot$h ili P = mh

**Primena Pitagorine teoreme:** $(a-b)^2+h^2=c^2$

Najpoznatiji trapezoid je **deltoid.**

**DELTOID**

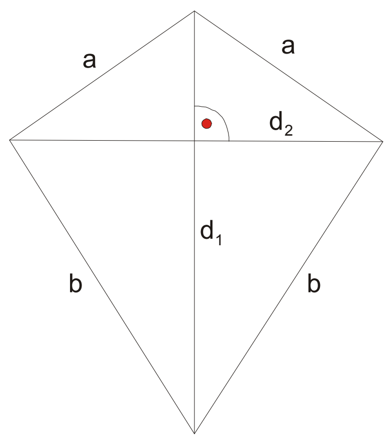
-Deltoid je trapezoid koji ima dva para jednakih uzastopnih stranica.

-Dijagonale deltoida su među sobom normalne.

-Simetrala deltoida je simetrala i njegovih uglova koje obrazuju jednake stranice

-Uglovi koje obrazuju nejednake stranice su među sobom jednaki.

-Dijagonale su istovremeno i simetrale uglova.

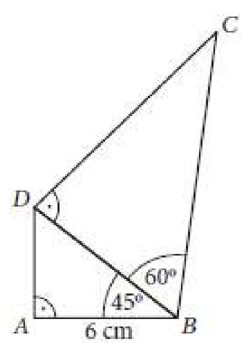



O = 2a + 2b $\qquad$ $P=\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$

**Evo sada par primera iz zbirke za pripremu male mature 2012. godine.**

**276.** Израчунај обим четвороугла *ABCD* на слици.
Прикажи поступак.

*O* = ________________ cm.



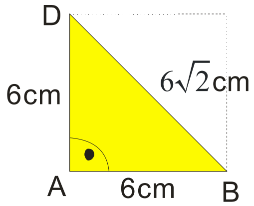

**Rešenje:**

Uočimo najpre da je trougao ABD jednakokrako pravougli trougao.

To nam govori da je AD = 6 cm.

U pripremnom fajlu smo govorili da je ovde zgodno izvršiti dopunu do punog kvadrata i da će onda stranica DB biti dijagonala tog kvadrata, a znamo da je formulica za dijagonalu kvadrata $a\sqrt{2}$ .

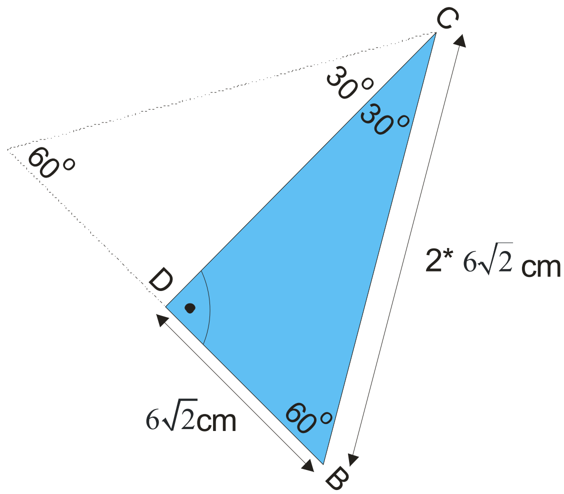
Pogledajmo sliku:




Znači, dobili smo BD= $6\sqrt{2}$ cm.

Naravno, ovo isto bi dobili primenom Pitagorine teoreme na dati trougao .

Posmatrajmo sada trougao BCD. On je očigledno polovina jednakostraničnog trougla, pa ćemo i njega dopuniti.




Stranica BC je dvostruko veća od stranice BD, pa je BC = $2\cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

DC je visina tog jednakostraničnog trougla čija je stranica $12\sqrt{2}$ .

Preko formulice za visinu trougla, dobijamo:

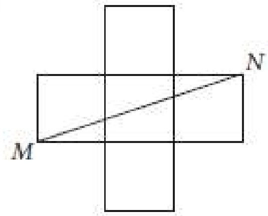
$$h_{\triangle} = \frac{a_{\triangle}\sqrt{3}}{2} \to DC = \frac{12\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6}cm$$

Naravno, isto ovo bi dobili primenom Pitagorine teoreme na dati trougao!

Sad nam ostaje samo da saberemo dužine svih stranica i eto obima:

$$O = AB + BC + CD + AD$$
$$O = 6 + 12\sqrt{2} + 6\sqrt{6} + 6$$
$$O = 12 + 12\sqrt{2} + 6\sqrt{6}$$
$$\boxed{O = 6(2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6})cm}$$

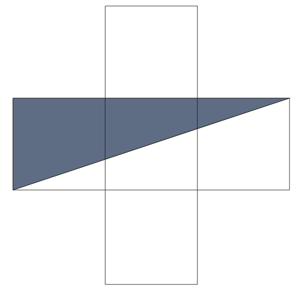
**277.** Фигура на слици састављена је од пет подударних квадрата.
Ако је $MN = 10$ cm, израчунај површину те фигуре.
Прикажи поступак.




Површина фигуре је ____ cm².

**Rešenje:**

Primenićemo Pitagorinu teoremu na trougao MNP.



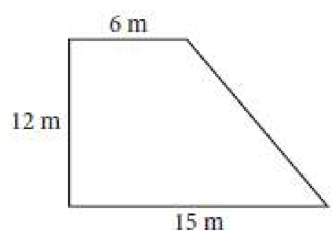
$$a^2+(3a)^2=10^2$$
$$a^2+9a^2=100$$
$$10a^2=100$$
$$\boxed{a^2=10}$$

Ovo je površina jednog kvadratića. A pošto ih ima 5, površina figure će biti:

$$P_f=5a^2$$
$$P_f=5\cdot 10$$
$$\boxed{P_f=50cm^2}$$

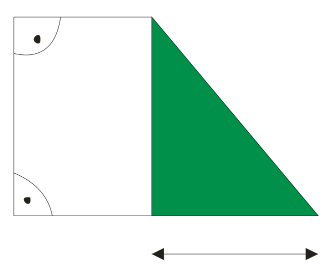
**Površina figure je** $50cm^2$

**280.** Колико метара жице је потребно да би се оградило двориште облика правоуглог трапеза као на слици?
Прикажи поступак.




Потребно је _____ m жице.

**Rešenje:**
Mi ustvari tražimo obim ovog trapeza! Moramo naći nepoznatu stranicu c. Pogledajmo sliku:



$$c^2=(a-b)^2+h^2$$
$$c^2=9^2+12^2$$
$$c^2=81+144$$
$$c^2=225$$
$$c=\sqrt{225}$$
$$\boxed{c=15m}$$

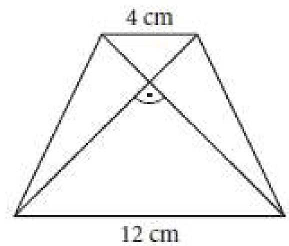
Obim je onda:

$$O=a+b+c+h$$
$$O=15+6+15+12$$
$$\boxed{O=48m}$$

Odgovor na postavljeno pitanje je:

**Potrebno je 48 m žice.**

**278.** Дијагонале једнакокраког трапеза секу се под правим углом. Ако су дужине основица трапеза 12 cm и 4 cm, израчунај површину трапеза.
Прикажи поступак.

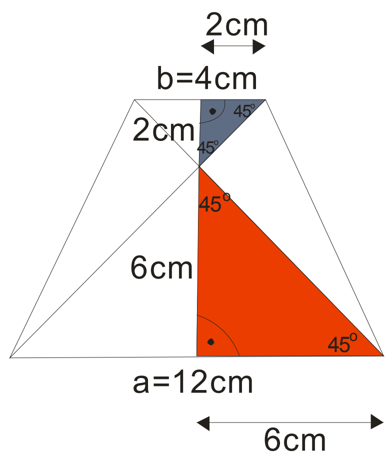



Површина трапеза је ____ cm².

**Rešenje:**

Proučimo najpre datu sliku.

Dijagonale se seku pod pravim uglom, tako da dole i gore imamo jednakokrako pravougle trouglove!




Označeni trouglovi su takodje jednakokrako pravougli, pa će visina celog trapeza biti: h= 6+2 = 8cm

Sad nije teško naći površinu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$P = \frac{12+4}{2} \cdot 8$$

$$P = \frac{16}{2} \cdot 8$$

$$P = 8 \cdot 8 \rightarrow \boxed{P = 64cm^2}$$

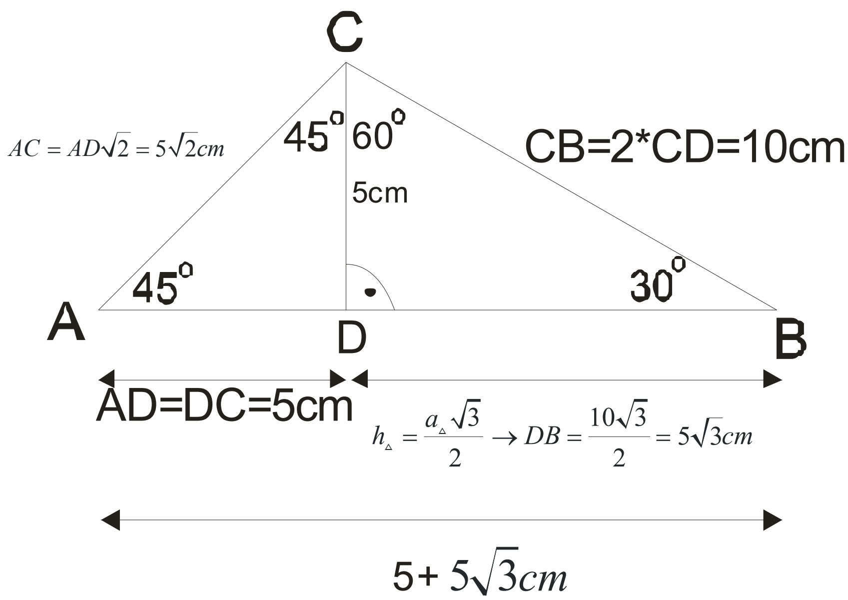
**Površina trapeza je** $64cm^2$

**279.** Израчунај обим троугла $ABC$, ако је висина која одговара страници $AB$ једнака 5 cm, унутрашњи угао код темена $A$ је 45° и унутрашњи угао код темена $B$ је 30°.

Прикажи поступак.

**Rešenje:**

Slika je ovde neophodna!




Najpre nadjemo uglove ova dva trougla.

Vršimo dopune do punog kvadrata ( na trouglu ADC) i dopunu do jednakostraničnog trougla (na trouglu DBC),

vrlo slično kao kod zadatka 256.

Na taj način dobijamo dužine stranica:

AB = $\left(5+5\sqrt{3}\right)cm$

BC = 10cm

AC= $5\sqrt{2}cm$

Tražimo obim, dakle:

$$O = 5+5\sqrt{3}+10+5\sqrt{2}$$

$$O = 15+5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

$$\boxed{O = 5(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})cm}$$

www.matematiranje.in.rs